b) Soit K le point défini par $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$. Calculer les coordonnées du point K et vérifier que $K\in P$.

3) Soit h l'homothétie de centre E qui transforme le point C en K.

a) Déterminer le rapport de h.

b) Le plan P coupe les arêtes [EA] et [EB] respectivement en I et J. Calculer le volume du tétraèdre EIJK.

Exercice N°16 1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&-1\\-1&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}-1&-1\\0&-1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OE}$.

D'où $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{OA}\Rightarrow E(0,2,3)$

b) Soit V le volume du tétraèdre ABCE alors $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AE}\right|=\frac{1}{6}AE^2=\frac{1}{6}(1+4+1)=1.uv$.

1) a) P a pour équation x-2y-z+5=0 ; un vecteur normal à P est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ donc $\vec{n}=-\overrightarrow{AE}$ et par suite P est parallèle au plan (ABC). (car $\overrightarrow{AE}$ est un vecteur normal à (ABC)).

b) On a : $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ donc $\begin{cases}2(-x_K)+(-x_K)=0\\2(2-y_K)+(-1-y_K)=0\\2(3-z_K)+(3-z_K)=0\end{cases}\Rightarrow K(0,1,3)$. On a : 0-2-3+5=0 donc $K\in P$.

2) a) h est l'homothétie de centre E qui transforme C en K. On pose a son rapport. On a $\overrightarrow{EK}=a\overrightarrow{EC}$. d'autre part $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ donc $3\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}, d'où\ \overrightarrow{EK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC},\ ainsi\ a=\frac{1}{3}$.

b) L'image du plan (ABC) par h est le plan parallèle à (ABC) passant par h(C)=K, donc h(ABC)=P. $A\in(ABC)\cap(AE)$ donc $h(A)\in P\cap(AE)=\{I\}$. ((AE) passe par le centre de h) d'où h(A)=I et de même h(B)=J. Le tétraèdre EIJK est l'image du tétraèdre ABCE par h. son volume est $V'=a^3V=\frac{1}{27}\times1=\frac{1}{27}.uv$

Exercice N°17 Soit ABCDEFGH un cube de coté 1.

1) a) Calculer $\overrightarrow{EH}\wedge\overrightarrow{EF}$. b) Montrer que le triangle AHF est équilatéral. Déterminer l'air du triangle AHF.

2) a) Montrer que le volume du tétraèdre AEFH est $\frac{1}{6}$. b) Déduire la distance du point E au plan AFH.

3) L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par les points A, F et H.

b) Retrouver la distance du point E au plan P.

3) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. Déterminer le volume du tétraèdre AF'H'E' avec F', H' et E' les images respectives par h des points F, H et E.

Exercice N°17 1) a) $\overrightarrow{EH}\wedge\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EA}$.

b) [AH] est le diagonale du carré EADF $\Rightarrow AH=\sqrt{2}AD$; [AF] est le diagonale du carré ABFE $\Rightarrow AF=\sqrt{2}AB$ et [FH] est le diagonale du carré EFGH $\Rightarrow FH=\sqrt{2}EF$ or ABCDEFGH est un cube alors AD=AB=EF d'où FH=AF=AH alors AHF est équilatéral. $A_{AHF}=\frac{\left\|\overrightarrow{AH}\wedge\overrightarrow{AF}\right\|}{2}$ or $\left\|\overrightarrow{AH}\wedge\overrightarrow{AF}\right\|=AH^2.\sin\widehat{HAF}=AH^2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\sqrt{2}AB\right)^2\frac{\sqrt{3}}{2}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

donc $A_{AHF}=\frac{\left\|\overrightarrow{AH}\wedge\overrightarrow{AF}\right\|}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.ua$.

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...